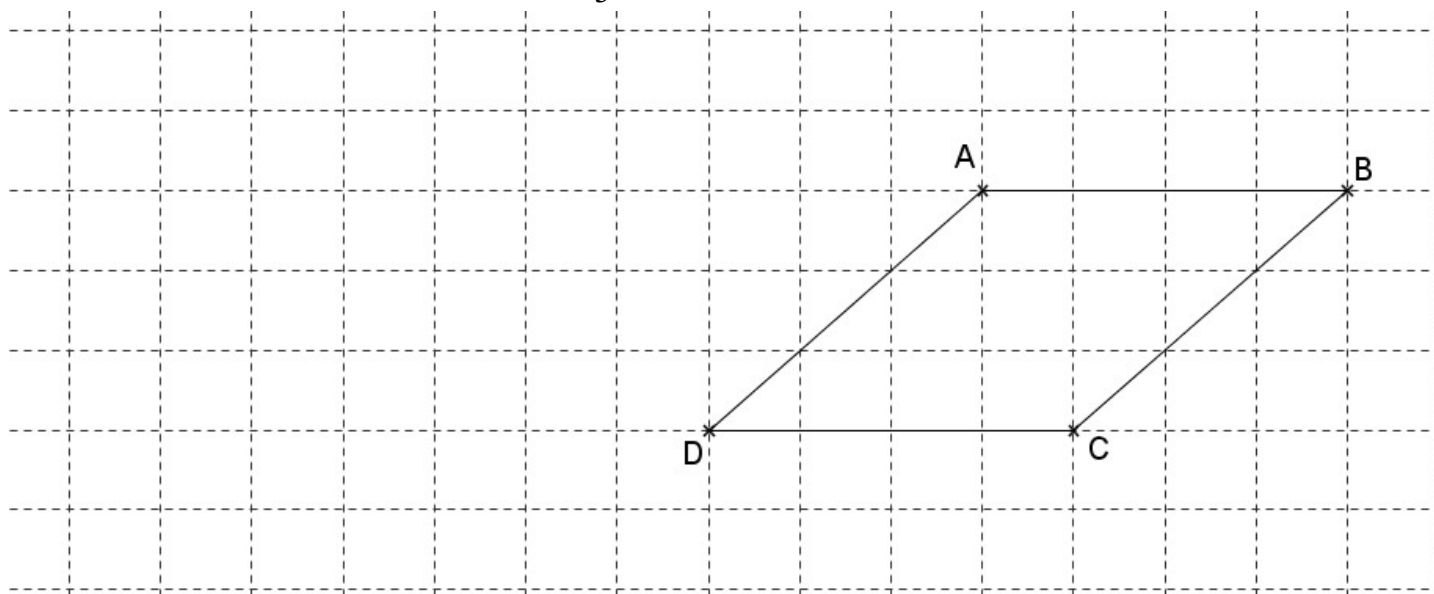


Exercice 1 : ABCD est un parallélogramme. On note C' le symétrique de C par rapport à D. Le point K est défini par $\vec{AK} = -2 \vec{AB}$ et le point L par $\vec{AL} = \frac{2}{3} \vec{AD}$. Construire les points C', K et L sur la figure ci-dessous.



Le but de l'exercice est de démontrer l'alignement des points K, L et C de deux manières différentes.

1^{ère} méthode :

- Exprimer les vecteurs $\vec{KL}$ et $\vec{KC}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.
- Montrer que les points K, L et C sont alignés.

2^{ème} méthode :

- Déterminer les coordonnées des points C, K et L dans le repère $(A ; \vec{AB} ; \vec{AD})$.
- Montrer que les points C, K et L sont alignés.

Exercice 2 : Soit ABC un triangle. On définit les points M, N et P par :

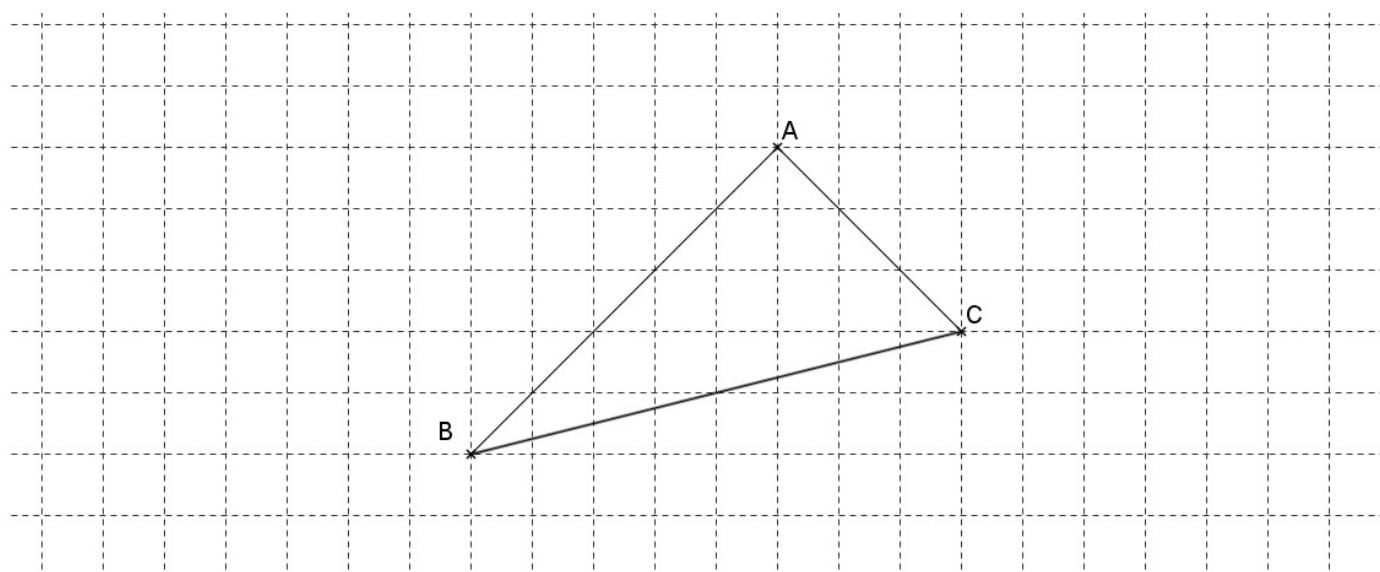
$$\vec{AM} = \frac{2}{5} \vec{AB}$$

$$\vec{NA} - 2 \vec{CN} = \vec{0}$$

$$\vec{PC} = -\frac{1}{2} \vec{BC}$$

1) Démontrer que $\vec{AN} = \frac{2}{3} \vec{AC}$.

2) Placer les points M, N et P sur la figure ci-dessous.



- Exprimer le vecteur $\vec{MN}$, puis le vecteur $\vec{NP}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
- En déduire que les points M, N et P sont alignés.

Exercice 3 : Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1 ; -2)$, $B(2 ; 3)$ et $C(-2 ; 8)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Soit de plus d la droite d'équation $-4x + y + 2 = 0$.

- 1) Sur une figure placer ces trois points et tracer la droite d . La figure sera complétée au fur et à mesure des questions.
- 2) Déterminer une équation cartésienne de la droite d_1 passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
- 3) Déterminer une équation de la droite d_2 parallèle à d et passant par C .
- 4) a) Justifier que les droites d_1 et d_2 sont sécantes.
b) Démontrer que les coordonnées du point d'intersection I des droites d_1 et d_2 sont $(-3 ; 4)$.
- 5) a) Calculer AB .
b) Quelle est la nature du triangle ABI ? Justifier.
- 6) On note (C) le cercle de centre B et rayon AB .
a) Soit $M(x ; y)$ un point du cercle (C) . Montrer que les coordonnées du point M vérifient l'équation $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 26$.
b) Déterminer le nombre de points d'intersection du cercle (C) et de la droite d .

Exercice 4 : On considère (Δ_m) la droite d'équation $x + my + 3 = 0$.

- 1) On considère dans cette question que $m = 2$.
a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ_2) avec l'axe des abscisses.
b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ_2) avec l'axe des ordonnées.
- 2) a) Déterminer le nombre m pour que (Δ_m) passe par le point $A(-2 ; 3)$.
b) Déterminer le nombre m pour que $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ soit un vecteur directeur de (Δ_m) .
c) Déterminer le nombre m pour que la droite (d_m) d'équation $y = (m - 2)x + 5$ et (Δ_m) soient parallèles.

Exercice Bonus 1 :

1. Le trinôme $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) admet deux racines distinctes x_1 et x_2 lorsque le discriminant Δ est strictement positif.
Démontrer que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.
2. Utiliser le résultat précédent pour trouver les solutions de $x^2 + 5x - 6 = 0$.

Exercice Bonus 2 : Dans un triangle ABC rectangle en A , avec $AB = 18$ m et $AC = 8$ m, on place les points D et E respectivement sur $[AC]$ et $[AB]$ tels que $AD = BE = x$.
Déterminer x pour que l'aire du triangle ADE soit égale à la moitié de l'aire du triangle ABC .

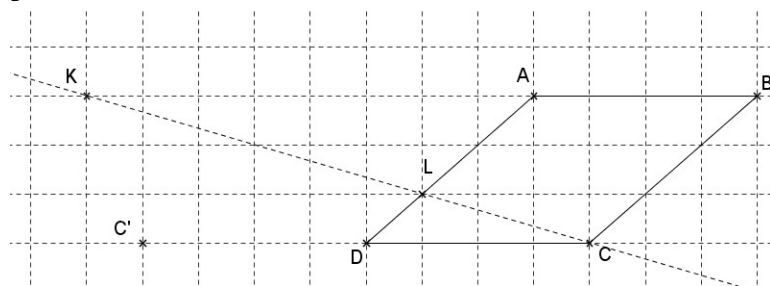
Exercice 1 : 1^{ère} méthode : a) $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{KC} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$b) \overrightarrow{KL} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{KC}.$$

Donc $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KC}$ sont colinéaires. Donc K, L et C sont alignés.



2^{ème} méthode : a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Donc **C(1 ; 1)**.

$$\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{AB}. \text{ Donc } \mathbf{K}(-2 ; 0). \quad \overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}. \text{ Donc } \mathbf{L}(0 ; \frac{2}{3}).$$

$$b) \overrightarrow{CK}(-3 ; -1) \text{ et } \overrightarrow{KL}(2 ; \frac{2}{3}). \text{ Testons le critère de colinéarité : } -3 \times \frac{2}{3} - (-1) \times 2 = -2 + 2 = 0.$$

Donc $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires. Donc K, L et C sont alignés.

Exercice 2 : 1) $\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{CN} = \vec{0}$. Donc $\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AN} = \vec{0}$. Donc $-\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AN} = \vec{0}$.

$$\text{Donc } 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN}. \text{ Donc } \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

2) Figure.

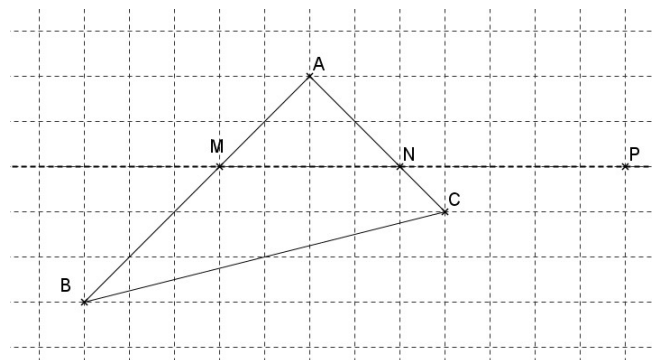
$$3) \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{NP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}.$$

$$4) \overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AC}) = \frac{5}{2}(-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}) = \frac{5}{4}(-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}) = \frac{5}{4}\overrightarrow{MN}.$$

$\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires. Les points M, N et P sont alignés.



Exercice 3 : 1) Figure.

2) $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d_1 donc d_1 a pour équation $3x + 2y + c = 0$.

Comme A appartient à d_1 on a :

$$3 \times 1 + 2 \times (-2) + c = 0. \text{ Donc } -1 + c = 0.$$

Donc $c = 1$.

d_1 a pour équation $3x + 2y + 1 = 0$.

3) d la droite d'équation $-4x + y + 2 = 0$.

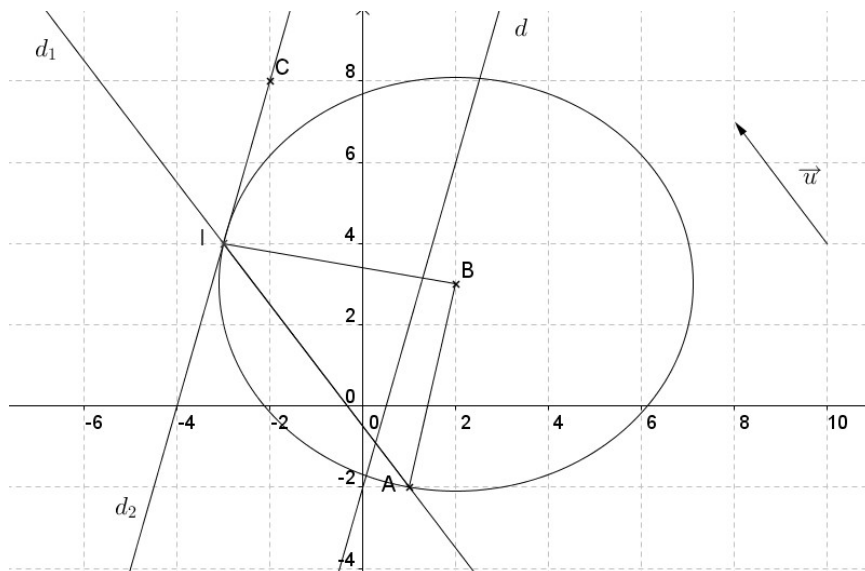
Donc le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur

de la droite d .

Comme d et d_2 sont parallèles, $\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de la droite d_2 .

Donc d_2 a pour équation $-4x + y + c' = 0$.

Comme C appartient à d_2 , on obtient : $-4 \times (-2) + 8 + c' = 0$.



Donc $c' + 16 = 0$. Donc $c' = -16$. **Donc d_2 a pour équation $-4x + y - 16 = 0$.**

4) a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de d_1 et d_2 non colinéaires car $-2 \times (-4) - 3 \times (-1) = 11 \neq 0$.
Donc de d_1 et d_2 ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes.

b) Les coordonnées de $I(x; y)$ vérifient alors :
$$\begin{cases} 3x + 2y + 1 = 0 \\ -4x + y - 16 = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 3x + 2y + 1 = 0 \\ 8x - 2y + 32 = 0 \end{cases}$$

On ajoute membre à membre : $11x + 33 = 0$. Donc $x = -3$.

Donc $3 \times (-3) + 2y + 1 = 0$. Donc $2y - 8 = 0$. Donc $y = 4$. **Donc $I(-3; 4)$.**

5) a) $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{26}$.

b) $AI = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{52}$ et $BI = \sqrt{(-3-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{26}$.

Donc $AB = BI$. ABI est isocèle en B . De plus $AB^2 + IB^2 = 52$ et $AI^2 = 52$. D'après la réciproque de Pythagore, comme $AI^2 = AB^2 + IB^2$, le triangle ABI est aussi rectangle en B . **ABI est isocèle rectangle en B .**

6) a) $M(x; y) \in (C)$. Donc BM est la longueur d'un rayon : $BM = \sqrt{26}$. Donc $BM^2 = 26$.

Donc $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 26$.

b) $M(x; y)$ appartient à (C) et à d si ses coordonnées vérifient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 26 \\ -4x + y + 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 26 \\ y = 4x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (4x-2-3)^2 = 26 \\ y = 4x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (4x-5)^2 = 26 \\ y = 4x - 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 + 16x^2 - 40x + 25 = 26 \\ y = 4x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17x^2 - 44x + 3 = 0 \\ y = 4x - 2 \end{cases} \end{aligned}$$

La 1^{ère} équation est du 2nd degré. $\Delta = (-44)^2 - 4 \times 17 \times 3 = 1732$. Comme Δ est positif, l'équation admet 2 solutions réelles distinctes. (C) et d ont donc deux points d'intersection.

$\left(\frac{44 - \sqrt{1732}}{34} = \frac{22 - \sqrt{433}}{17} \approx 0,07 \text{ et } \frac{44 + \sqrt{1732}}{34} = \frac{22 + \sqrt{433}}{17} \approx 2,51 \text{ sont les deux solutions qui correspondent aux deux abscisses des points d'intersection} \right)$

Exercice 4 : 1) (Δ_2) a pour équation $x + 2y + 3 = 0$.

a) Si $y = 0$, on obtient $x + 3 = 0$, donc $x = -3$.

Les coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ_2) avec l'axes des abscisses sont donc $(-3; 0)$.

b) Si $x = 0$, on obtient $2y + 3 = 0$, donc $2y = -3$, donc $y = -1,5$.

Les coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ_2) avec l'axes des ordonnées sont donc $(0; -1,5)$.

2) a) (Δ_m) passe par le point $A(-2; 3)$ donc $-2 + 3m + 3 = 0$ donc $3m = -1$. Donc $m = -\frac{1}{3}$.

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ_m) . $\vec{v} \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ_m) . u et v sont donc colinéaires.

Donc $4 + 5m = 0$ d'après le critère de colinéarité. Donc $m = -\frac{4}{5}$.

c) (d_m) et (Δ_m) sont parallèles si le vecteur directeur $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ m-2 \end{pmatrix}$ de (d_m) et $\vec{v} \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$ celui de (Δ_m) sont colinéaires. D'après le critère de colinéarité on obtient : $1 + m(m-2) = 0$. Soit $m^2 - 2m + 1 = 0$.
 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$. L'équation n'a qu'une solution $m_0 = \frac{2}{2} = 1$. **$m = 1$.**